اثبات‌هایی بدون کلام توسط منحنی جادویی

عزیزه احمدی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی استان زنجان

اشاره
در این مقاله، اثبات‌هایی ساده برای روابط لگاریتمی تابع lnx ارائه می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: اثبات بدون کلام، منحنی جادویی، اثبات

مقدمه

قبل از هر مقدمه‌ای، توجه شما را به متن زیر از صفحهٔ ۴۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال تازه‌تألیف دوره متوسطه [۳]، که خود، مقدمه‌ای برای این مقاله است، جلب می‌کنیم:

دنباله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}: 2,(\frac{3}{2})^2,(\frac{4}{3})^3,(\frac{5}{4})^4,(\frac{6}{5})^5,...$$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و هم از جنبه نظری، اهمیت فوق‌العاده دارد. چرا؟

ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

عدد حقیقی e به‌صورت طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود.

به نظر من، جای یک چرای دیگر در این متن خالی است. چرا حدی که به اذعان مؤلفان این کتاب درسی، کاربردی و با اهمیت بوده و اساس بعضی از برهان‌ها درهمین کتاب (برای مثال مشتق تابع نمایی طبیعی در صفحه ۱۶۲) است، اثبات نشده است؟ اگر دانش‌آموزی بپرسد چرا مقدار این حد برابر عدد گنگ e است، چه جوابی می‌توان به او داد؟ برخلاف کتاب قبلی حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره متوسطه [۲] که از کنار این مسئله می‌گذشت، این کتاب تازه‌تألیف، در صفحات ۴۷ تا ۵۰، سعی کرده تا با اثبات صعودی و از بالا کراندار بودن دنباله $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$، همگرایی آن را نتیجه بگیرد و تقریبی برای جواب حد ارائه کند، اما هنوز توجیهی برای مقدار دقیق حد ندارد. این خیلی عالی است که مؤلفان این

کتاب درسی، سعی دارند جای خالی این حد مهم را در کتاب‌های درسی پر کنند، ولی به‌نظر من، روشی پیچیده برای حل مشکل برگزیده شده است. راه آسان حل این مشکل، استفاده از تعریف زیر از لگاریتم طبیعی است:

$$\int_1^t \frac{1}{x}dt = \ln t \quad (1)$$

متأســفانه این تعریف گرانقدر، از کتاب حســاب دیفرانسیل و انتگرال تازه‌تألیف، حذف شده است!

در زیر با استفاده از رابطه فوق، برهان‌هایی ساده برای مقدار دقیق حد اشاره شده و نیز روابط لگاریتم طبیعی ارائه خواهیم کرد.

اثبات روابط لگاریتم طبیعی

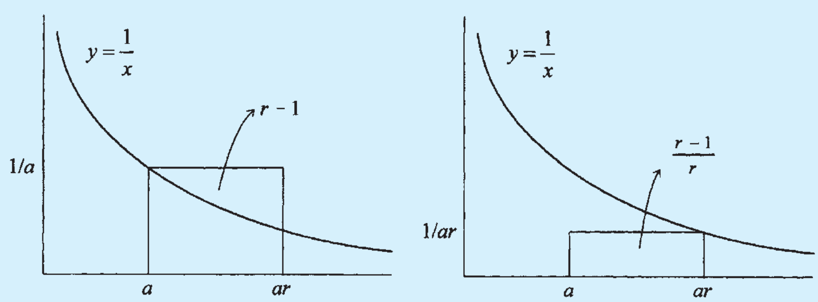
منحنی $y=\frac{1}{x}$ را در دامنه اعداد حقیقی مثبت در نظر بگیرید. دانش‌آموزان با نمودار این تابع در کتاب حسابان تازه‌تألیف [۴] آشنا شده‌اند. توضیحات باقیمانده راجع به این تابع نیز، در حساب دیفرانسیل و انتگرال تازه‌تألیف به کرات در بخش‌های حد، مجانب، مشتق، رسم نمودار توابع، انتگرال معین و بسیاری از تمرینات و فعالیت‌ها آمده است. به کمک این منحنی جادویی، اثباتی برای روابط زیر که در آن a و b اعداد حقیقی مثبت هســتند، ارائه خواهیم کرد. قابل ذکر است که اگرچه در اثبات این روابط، از شرط $b \geq a > 1$ استفاده شده است، ولی برهان ما برای هر عدد حقیقی مثبت، قابل تکرار است.

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (2)$$

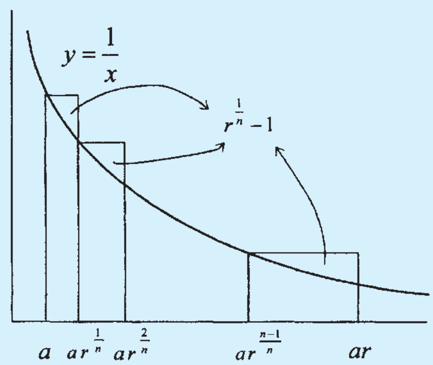
$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad (3)$$

$$\ln a^p = p \times \ln a \quad (4)$$

فرض کنید a و r اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر مستطیل‌های ریمان بالا و پائین را در بازه [a,ar] به نمودار $y=\frac{1}{x}$ اضافه کنیم، نمودارهای زیر را داریم:



همان‌طور که مشــاهده می‌کنید، در این بازه، مســاحت یک مستطیل ریمان بالا r-1 و مساحت یک مستطیل ریمان پائین $\frac{r-1}{r}$ است. مشابه این رابطه، روی هر بازه حقیقیِ واجد این شرط که انتهای بازه از ضرب ابتدای بازه در یک ضریب ثابت به‌دست آمده باشد، برقرار اســت. حال بازه [a,ar] را به n بازه جزء طوری افراز کنید که شــرط بالا برای هر بازه جزء، هم‌چنان برقرار باشد. در نمودار صفحه بعد، این اتفاق افتاده است.



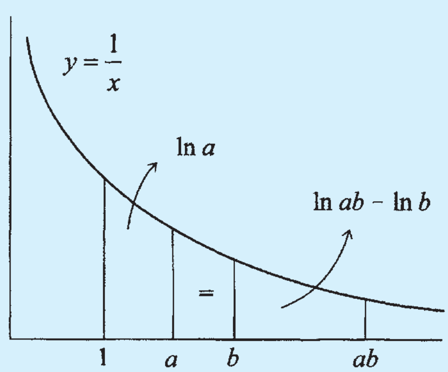
در نمودار فوق، طول بلندترین بازه جزء را Δx_n می‌نامیم. داریم:

$$\Delta x_n = ar - ar^{\frac{n-1}{n}} = ar^{\frac{n-1}{n}}(r^{\frac{1}{n}}-1).$$

با میل دادن n به سمت بی‌نهایت، Δx_n به صفر میل می‌کند و حد مجموع ریمان بالا، برابر سطح زیر نمودار خواهد شد. پس چون مساحت هر مستطیل در نمودار فوق، برابر $r^{\frac{1}{n}}-1$ است، مساحت تحت نمودار $y=\frac{1}{x}$، محدود به بازه [a,ar] برابر است با

$$\lim_{n\to\infty} n\times(r^{\frac{1}{n}}-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{n}}\ln r = \ln r$$

از این محاسبات نتیجه می‌شود که مساحت ناحیه محصور به نمودار $y=\frac{1}{x}$ و بازهٔ [a,ar]، به مقدار a بستگی نداشته و برابر lnr است. اینک آماده‌ایم به کمک نمودار زیر، برهانی برای رابطه (۲) ارائه کنیم.

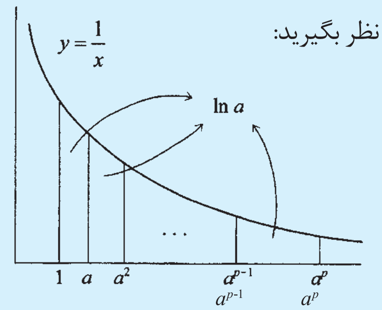


ابتدا دقت کنید که بنابر نتیجه بالا، مساحت تحت نمودار $y=\frac{1}{x}$، محدود به بازه [b,ab] برابر lna است و به مقدار b بستگی ندارد. از طرفی به کمک رابطه (۱)، این مساحت برابر lnab−lnb است. پس lnab−lnb=lna. یعنی رابطه (۲) برقرار است.

رابطه (۳) نیز به آسانی و با استفاده از رابطه (۲) اثبات می‌شود:

$$\ln a = \ln(\frac{a}{b}.b) = \ln\frac{a}{b} + \ln b \Rightarrow \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}\cdot$$

برای اثبات رابطه (۴)، نمودار زیر را در نظر بگیرید:



همان‌طور که در نمودار فوق دیده می‌شود، مساحت تحت نمودار در بازه $[۱,a^p]$، به p ناحیه با مســاحت‌های مســاوی lna تقسیم شده اســت. یعنی مساحت ناحیه موردنظر $p\times \ln a$ است. از طرفی بنابر رابطه (۱)، مساحت تحت نمودار در بازه $[۱,a^p]$ برابر $\ln a^p$ است. پس

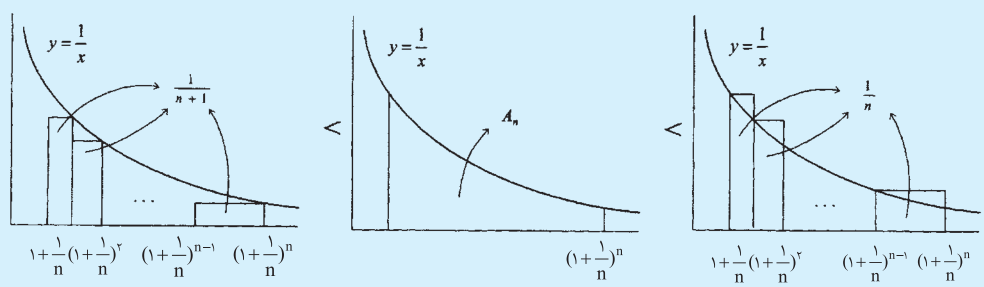
$$\ln a^p = p\times \ln a$$

برهانی ساده برای مقدار دقیق حد

اینک نشان خواهیم داد:

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e \quad (۵)$$

به نمودارهای زیر توجه کنید:



همان‌طور که در این نمودارها مشاهده می‌شود، $\frac{n}{n+۱} < A_n < ۱$. با گرفتن حد در بی‌نهایت از طرفین و اســتفاده از قضیه فشردگی، نتیجه می‌شود $۱=\lim_{n\to\infty} A_n$. پس در نتیجه

$$۱=\lim\int_{۱}^{(۱+\frac{۱}{n})^n}\frac{۱}{x}dx=\lim\ln(۱+\frac{۱}{n})^n=\ln\lim(۱+\frac{۱}{n})^n$$

در نتیجه، چون $\ln\lim(۱+\frac{۱}{n})^n$ مساوی ۱ شد، به‌طور معادل، $e=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$.

منابع

1. Warren Page. (2002). Proofs without words under the magic curve, *The coll. Math. Journal*., Vol. **33**, 42-46.

۲. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲، چاپ سیزدهم، ۱۳۸۶.

۳. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی، چاپ اول، ۱۳۹۱.

۴. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، حسابان، چاپ اول، ۱۳۹۰.